ohne Rest theilbar d. h. auch durch $\beta$ theilbar sein. Dividiren wir wirklich, so finden wir, daß der Ausdruck rechts keine ganze Zahl sein kann, weil $\frac{\alpha^m}{\beta}$ keine ist. Folglich ist eine Potenz eines Bruches selbst wieder ein Bruch oder die Wurzel aus einer ganzen Zahl ist entweder eine ganze Zahl oder sie existirt arithmethisch gar nicht. Wir haben also eine neue Gattung von Zahlen nämlich solche, welche kein angebbares Verhältniß zur Eins haben. Man nennt sie Irrationalzahlen.

5. Die Irrationalzahl $\sqrt[m]{A}$ hat — obgleich sie nicht existirt oder realisirt werden kann, doch die Eigenschaft daß $(\sqrt[m]{A})^m = A$ ist. Dieser Eigenschaft zu Folge liegt sie zwischen zwei Zahlen a und a + 1 welche um 1 von einander verschieden sind. Es entsteht daher die Frage ob diese Grenzen nicht näher an einander gerückt werden können. Bilden wir die Potenzen

$$\left(a+\frac{1}{\beta}\right)^m, \left(a+\frac{2}{\beta}\right)^m, \left(a+\frac{3}{\beta}\right)^m, \left(a+\frac{4}{\beta}\right)^m, \ldots$$

so finden wir zuletzt ein $\frac{\alpha}{\beta}$ von der Beschaffenheit, daß

$$\left(a+\frac{\alpha}{\beta}\right)^m \angle A \text{ aber } \left(a+\frac{\alpha+1}{\beta}\right)^m \urcorner A$$

ist. Auf diese Weise ist

$$a+\frac{\alpha}{\beta} \angle \sqrt[m]{A} \angle a+\frac{\alpha+1}{\beta}$$

die Grenzen sind also nur um $\frac{1}{\beta}$ von einander entfernt. Da nun $\beta$ so groß angenommen werden kann als man will, so kann man auch die Grenzen zwischen welchen eine Wurzel liegt so nahe an einander rücken als man will, d. h. die Arithmetik lehrt statt der Irrationalzahl eine Rationalzahl zu finden, welche bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit dieselbe Eigenschaft als die Irrationalzahl hat.

$$\sqrt[m]{A} = a + \frac{\infty}{\infty}$$

6. Da nun jede Zahl als Systemzahl auszudrücken ist, so erhalten wir folgende Auflösung: