entwickelte Gleichung [!] aufgestellt hat, sagt einfach: „Nun sei φ ein unendlich kleiner Bogen, so daß $\sin\varphi = \varphi$ und $\cos\varphi = 1$. Wenn alsdann n eine unendlich große Zahl bedeutet, so daß $n\varphi$ ein endlicher Bogen ist, den wir $= x$ setzen wollen, so ist, weil dann $\sin\varphi = \varphi = \frac{x}{n}$ ist, $\cos x =$ u. s. w." Will man hier (was nach den heutigen Forderungen der Wissenschaft allerdings zu geschehen hat) eine tiefere Begründung eintreten lassen, so scheint die nachstehende Erwägung nicht blos einfacher, sondern auch lichtvoller zu sein, als der von Fourcy eingeschlagene Weg.

Bedeutet α eine unendlich kleine Zahl, so ist bekanntlich $(1 \pm \alpha)^v$ immer $= 1$, so lange v, wenn auch sehr groß, doch noch endlich ist. Jene Potenz hat in der Regel einen von 1 verschiedenen Werth, wenn v unendlich groß wird; sie reducirt sich aber selbst in diesem Falle wieder auf 1, sobald α ein unendlich Kleines höherer Ordnung ist. *) Daß nun $\cos\varphi$ für ein unendlich kleines φ sich von 1 nur um eine unendlich kleine Zahl zweiter Ordnung unterscheiden könne, ersieht man unmittelbar daraus, daß $\cos\varphi$ um so näher an den Werth $1 - \varphi \cos\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)$ kommt, je kleiner φ wird; und hieraus folgt, daß für $\lim. \varphi = 0$ nicht nur $[\lim. \cos\varphi]^{\infty} = 1$, sondern auch $\left[\lim. \frac{\sin\varphi}{\varphi}\right]^{\infty} = 1$ sei, indem $\left(\frac{\varphi}{\sin\varphi}\right)^v$ stets zwischen den Grenzen 1^v und $\frac{1}{(\cos\varphi)^v}$ liegt. Damit ist jede Bedenklichkeit auf eine eben so gründliche als direkte Weise gehoben.

Wollte etwa Fourcy ein näheres Eingehen auf die verschiedenen Ordnungen unendlich kleiner Zahlen vermeiden, so konnte er das, was oben mit Hülfe des Ausdrucks $1 - \varphi \cos\left(\frac{\pi - \varphi}{2}\right)$ gezeigt wurde, auch reingeometrisch erläutern, indem er nur daran zu erinnern brauchte, daß bei abnehmenden Werthen von φ die Länge $R\cos\varphi$ viel rascher der Grenze R (oder $\cos\varphi$ der Grenze 1) zustrebt, als φ der Grenze 0, weßhalb es erlaubt sein muß, den Cosinus eines unendlich kleinen Bogens nicht nur als unendlich nahe an 1 liegend, sondern wirklich $= 1$ anzunehmen, selbst dem unendlich großen Exponenten gegenüber, durch welchen höchstens noch der unendlich kleine Unterschied zwischen φ und 0 Einfluß üben kann, nicht mehr aber eine Werthabweichung, die sogar zu jenem Unterschied kein Verhältniß

---

*) Die Binomialreihe liefert

$$\left(1 \pm \frac{1}{mn}\right)^m = 1 \pm \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{1}{2!\,n^2} \pm \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdot \frac{1}{3!\,n^3} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right) \cdot \frac{1}{4!\,n^4} \pm \ldots$$

und für $m = \infty$:

$$\left(1 + \frac{1}{n\,\infty}\right)^{\infty} = 1 \pm \frac{1}{n} + \frac{1}{2!\,n^2} \pm \frac{1}{3!\,n^3} + \frac{1}{4!\,n^4} \pm \ldots$$

Diese Reihe kann also, je nach der Bedeutung von n, verschiedene Werthe ausdrücken. Setzt man nun aber auch $n = \infty$, so daß $\frac{1}{mn}$ ein unendlich Kleines zweiter Ordnung wird, so ergibt sich

$$\left(1 \pm \frac{1}{\infty^2}\right)^{\infty} = 1.$$